**КИЇВСЬКА МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК
УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ**

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ
З МАТЕМАТИКИ
ІІ етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів - членів Київської Малої академії наук учнівської молоді у 2012-2013 навчальному році

КИЇВ -2013

М.О. Назаренко, А.М. Назаренко. Контрольні завдання з математики ІІ етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Київської Малої академії наук учнівської молоді у 2012-2013 навчальному році. Навчально-методичний посібник. — К.: КПНЗ «Київська Мала академія наук учнівської молоді», 2013. — 29 с.

Збірник підготовлений за матеріалами ІІ етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Київської Малої академії наук учнівської молоді у 2012-2013 навчальному році.

Видання містить:

- контрольні завдання для відділень математики, комп'ютерних наук, економіки та технічних наук;
- розв'язки, методичні вказівки та відповіді до контрольних завдань для відділення математики.

Збірник адресований учасникам ІІ етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Київської Малої академії наук учнівської молоді для підготовки до контрольної роботи з математики, їх педагогічним та науковим керівникам, а також всім зацікавленим у поглибленні математичних знань.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

На II (міському) етапі Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів Київської Малої академії наук учнівської молоді відділень математики, комп'ютерних наук, економіки та технічних наук важливою складовою є контрольна робота з математики. Вона має за мету визначити рівень математичної підготовки конкурсанта, ступінь його готовності до науково-пошукової роботи. Навіть вагомі результати науково-дослідницької роботи не можуть забезпечити перемогу в конкурсі, якщо учень не володіє основними знаннями з математики і не вміє використовувати їх на практиці.

Контрольні завдання з математики складаються окремо для кожного з відділень, де базовою дисципліною є математика. Контрольні завдання складаються окремо для дев'ятих, десятих та одинадцятих класів згідно з програмою шкільного курсу математики відповідного класу. Для кожного класу завдання містять дев'ять задач різного рівня складності. Низка запропонованих задач мають за мету виявити креативність мислення та творчий підхід до розв'язання практичних задач.

1. УМОВИ ЗАДАЧ

Відділення математики

9 клас

1. Знайти найбільше тризначне число, яке можна записати у вигляді суми тринадцяти послідовних натуральних чисел. Відповідь обґрунтувати.

2. Розв'язати рівняння $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=8\cdot$

3. Знайти всі трійки цілих чисел $(x;y;z)$, для яких

$$\begin{cases} x+3y+xz=7, \\ x+2y-yz=1. \end{cases}$$

4. Розв'язати систему $\begin{cases} m+n=95, \\ НСК(m,n)=350, \end{cases}$

де *m* і *n* – натуральні числа, а $НСК(m,n)$- найменше спільне кратне чисел *m* і *n*.

5. Довести, що для довільних додатних дійсних чисел *a, b, c* виконується нерівність

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot$$

6. Відомо, що x_1 та x_2 – дійсні корені рівняння $x^2+ax+a-2013=0$. При якому значенні *a* сума $x_1^2+x_2^2$ буде найменшою ?

7. Знайти координати вектора $\vec{b}$, який колінеарний вектору $\vec{a}=(-1;2)$, якщо його довжина $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{10}\cdot$

8. У прямокутному трикутнику *ABC* із вершини прямого кута *C* проведена висота *CD*. Радіуси кіл, вписаних в трикутники *ACD* і *BCD*, дорівнюють відповідно r_1 і r_2. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник *ABC*.

9. В рівнобічну трапецію, основи якої 8 см і 2 см, вписане коло. Знайти довжину цього кола.

10 клас

1. Деяке число є добутком п'яти послідовних натуральних чисел. Сума часток, що дістаються від ділення цього числа на кожний із п'яти співмножників, дорівнює 5944. Знайти це число. Відповідь обґрунтувати.

2. Знайти всі пари дійсних чисел *(x;y)*, для яких

$$\sqrt{3-x-2y}+\sqrt{5+x}+\sqrt{3y+9}=7.$$

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\sin^3 y+\sin^4 2x=1,\\ \cos^4 y+\cos^5 2x=1.\end{cases}$$

4. Розв'язати рівняння

$$x^2+tg^2(x+y)+ctg^2(x+y)=1+2x.$$

5. Розв'язати нерівність $\sqrt{tg\frac{x}{2}}\left(x^2-11x+10\right)\le 0$.

6. Довести, що коли a, b, c – довжини сторін трикутника, то при довільному значенні x тричлен $b^2x^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)x+c^2$ буде додатним.

7. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2|\vec{b}|$ і вектор $2\vec{a}+\vec{b}$ перпендикулярний вектору $\vec{a}-3\vec{b}$.

8. У трикутнику, один із внутрішніх кутів якого дорівнює $\frac{2\pi}{3}$, довжини сторін утворюють арифметичну прогресію. Знайти периметр цього трикутника, якщо найдовша із сторін дорівнює 7см.

9. В прямокутну трапецію вписане коло радіуса r. Знайти сторони трапеції, якщо її менша основа дорівнює $\frac{4r}{3}$.

11 клас

1. Нехай $\overline{abc}$ - трицифрове додатне число. Якого найбільшого значення може набувати вираз $\overline{abc}-(a^3+b^3+c^3)$?

2. Розв'язати рівняння $\arcsin(2x-1)+\arcsin(1-x)=\dfrac{\pi}{3}$.

3. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \cos\dfrac{x}{2}\ge\dfrac{1}{2}, \\ \sin 2x\le 0, \\ tgx\le 1. \end{cases}$

4. Скільки розв'язків має система

$$\begin{cases} \sin x+5\cos y+7\sin z=12, \\ \cos x-5\sin y+7\sin z=5, \end{cases}$$

якщо $|x|\le 2\pi,\ \ |y|\le 2\pi,\ \ |z|\le 2\pi$? Відповідь обґрунтувати.

5. Розв'язати рівняння

$$8^{\sqrt[3]{\log_2^2 x}}=6+7\cdot x^{\sqrt[3]{\log_x 2}}.$$

6. З'ясувати, скільки коренів має рівняння $4\sin 5x-5\sin 4x=a$ на проміжку $[0;2\pi]$ в залежності від значення параметра *a*.

7. При яких значеннях *a* функція

$$f(x)=(a-12)x^3+3(a-12)x^2+6x+7$$

монотонно зростає для всіх дійсних *x* ? Відповідь обґрунтувати.

8. Навколо кола діаметра 15см описана рівнобічна трапеція з бічною стороною, що дорівнює 17см. Знайти основи трапеції.

9. У конус, радіус основи якого дорівнює 6 см та висота 12 см, вписано циліндр найбільшого об’єму (основа циліндра лежить на основі конуса). Знайти радіус основи та висоту циліндра.

Відділення комп'ютерних наук

9 клас

1. Знайти найбільше тризначне число, яке можна записати у вигляді суми семи послідовних натуральних чисел. Відповідь обґрунтувати.

2. Розв'язати рівняння $x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=8$.

3. Знайти всі трійки цілих чисел $(x; y; z)$, для яких

$$\begin{cases} 2x+5y+4xz=5, \\ x+2y+yz=2. \end{cases}$$

4. Розв'язати систему $\begin{cases} m-n=22, \\ НСК(m,n)=132, \end{cases}$

де m і n – натуральні числа, а $НСК(m,n)$- найменше спільне кратне чисел m і n.

5. Довести, що для додатних дійсних чисел a, b, c виконується нерівність

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{a+c}{a^2+c^2}\le\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

6. Відомо, що x_1 та x_2 – дійсні корені рівняння $x^2+ax+2a-2013=0$. При якому значенні a сума $x_1^2+x_2^2$ буде найменшою ?

7. Знайти координати вектора $\vec{b}$, який колінеарний вектору $\vec{a}=(2;-3)$, якщо скалярний добуток цих векторів $(\vec{a},\vec{b})=-26$.

8. У прямокутному трикутнику *ABC* бісектриса прямого кута *C* ділить гіпотенузу *AB* на відрізки $AD=c_1$ і $DB=c_2$. Знайти довжину цієї бісектриси.

9. В рівнобічну трапецію вписане коло радіуса 2 см. Знайти площу цієї трапеції, якщо довжина бічної сторони дорівнює 10см.

10 клас

1. Деяке число є добутком п’яти послідовних натуральних чисел. Сума часток, що дістаються від ділення цього числа на кожний із п’яти співмножників, дорівнює 2754. Знайти це число. Відповідь обґрунтувати.

2. Знайти всі пари дійсних чисел *(x;y)*, для яких

$$\sqrt{7-x-4y}+\sqrt{3+x}+\sqrt{4y-1}=3\sqrt{3}.$$

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\sin^3 2y+\sin^4 x=1,\\ \cos^4 2y+\cos^5 x=1.\end{cases}$$

4. Розв’язати рівняння

$$2x^4+1=\sin^4 x+\cos^6 x.$$

5. Розв’язати нерівність

$$\sqrt{ctg\frac{x}{2}}\left(x^2-3x-4\right)\le 0.$$

6. Довести, що коли *a, b, c* – довжини сторін трикутника, то справедлива нерівність $2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$.

7. Довжини ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівні. Знайдіть кут між цими векторами, якщо відомо, що вектори $\vec{a}+2\vec{b}$ і $5\vec{a}-4\vec{b}$ перпендикулярні.

8. Довжини сторін *AB*, *BC* і *AC* трикутника *ABC* утворюють у вказаному порядку арифметичну прогресію. Знайти відношення висоти трикутника *ABC*, яка опущена із вершини *A* на сторону *BC*, до радіуса вписаного кола.

9. У прямокутній трапеції більша діагональ довжиною 24 см є бісектрисою гострого кута. Знайти площу трапеції, якщо відстань від вершини тупого кута до діагоналі дорівнює 9 см.

11 клас

1. Чи можна число $\underbrace{999...9}_{2013}$ записати у вигляді суми трьох квадратів цілих чисел ? Відповідь обґрунтувати.

2. Розв'язати рівняння $\arcsin(2x-1)-\arccos\dfrac{2-x}{2}=\dfrac{\pi}{6}$.

3. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \sin\dfrac{x}{2}\le\dfrac{1}{2}, \\ \cos 2x\ge 0, \\ tgx\ge -1. \end{cases}$

4. Скільки розв'язків має система

$$\begin{cases} \sin x+5\sin y+7\sin z=5, \\ \cos x+5\cos y+7\cos z=12, \end{cases}$$

якщо $|x|\le 2\pi,\ \ |y|\le 2\pi,\ \ |z|\le 2\pi$? Відповідь обґрунтувати.

5. Розв'язати рівняння $9^{\sqrt[3]{\log_3^2 x}}=2+x^{\sqrt[3]{\log_x 3}}$.

6. З'ясувати, скільки коренів має рівняння $4\cos 3x-3\cos 4x=a$ на проміжку $[0;2\pi]$ в залежності від значення параметра a.

7. При яких значеннях a функція

$$f(x)=2ax^3+3(3-2a)x^2-36x+4$$

зростає на відрізку [1;1,5] ? Відповідь обґрунтувати.

8. Навколо кола радіуса 1 см описана рівнобічна трапеція, площа якої дорівнює 5 см^2. Знайти площу чотирикутника, вершинами якого служать точки дотику кола і трапеції.

9. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює 4, а сума довжин його висоти і твірної дорівнює a. Знайти об’єм конуса.

Відділення економіки

9 клас

1. Знайти найбільше двозначне число, яке можна записати у вигляді суми тринадцяти послідовних натуральних чисел. Відповідь обґрунтувати.

2. Розв’язати рівняння $4x^2 + \left(\frac{4x}{x-2}\right)^2 = 20$.

3. Знайти всі трійки цілих чисел $(x; y; z)$, для яких

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2xz = 3, \\ 3x + 4y + yz = 4. \end{cases}$$

4. Розв'язати систему $\begin{cases} m \cdot n = 240, \\ НСД(m,n) = 4, \end{cases}$

де m і n – натуральні числа, а $НСД(m,n)$ - найбільший спільний дільник чисел m і n.

5. Довести, що для довільних дійсних чисел a і b, виконується нерівність

$$2a^2 + b^2 + 2ab - 6a + 2b + 5 \geq 0.$$

6. Корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ - натуральні числа, причому $p + q = 2013$. Знайти ці корені.

7. Знайти координати вектора $\vec{b}$, який перпендикулярний вектору $\vec{a} = (-2;1)$, якщо його довжина $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{5}$.

8. У прямокутний трикутник з катетами a і b вписано квадрат, який має з трикутником спільний прямий кут. Знайти периметр цього квадрата.

9. Навколо кола радіуса 2см описана рівнобічна трапеція з гострим кутом $\frac{\pi}{3}$.

Знайти довжину середньої лінії трапеції.

10 клас

1. Деяке число є добутком чотирьох послідовних натуральних чисел. Сума часток, що дістаються від ділення цього числа на кожний із чотирьох співмножників, дорівнює 638. Знайти це число. Відповідь обґрунтувати.

2. Знайти всі пари дійсних чисел *(x;y)*, для яких

$$\sqrt{2-x+2y}+\sqrt{x+4}+\sqrt{2-y}=5.$$

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\sin^3 x+\sin^4 y=1,\\ \cos^4 x+\cos^5 y=1.\end{cases}$$

4. Розв’язати рівняння $x^4+1=2x^2\sin y$.

5. Розв’язати нерівність $\dfrac{\sqrt{\sin 2x}}{3x-x^2}\geq 0$.

6. Довести, що коли *a, b, c* – довжини сторін трикутника, то справедлива нерівність

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)(a+b+c)>2\left(a^3+b^3+c^3\right).$$

7. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\dfrac{2\pi}{3}$. Знайти λ із умов, що $\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{a}\right|$ і вектор $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ перпендикулярний вектору $\vec{a}-\vec{b}$.

8. Довжини сторін прямокутного трикутника утворюють арифметичну прогресію з різницею 1 см. Знайти довжину гіпотенузи.

9. У прямокутну трапецію з основами 2 см і 3 см вписано коло. Знайти радіус цього кола.

11 клас

1. Відшукати всі ті натуральні трицифрові числа, які у дванадцять разів більші від суми своїх цифр.

2. Розв'язати рівняння $\arcsin x \cdot \arccos x = \dfrac{\pi^2}{18}$.

3. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \sin^2 \dfrac{x}{2} - \cos^2 \dfrac{x}{2} \ge 0, \\ tgx \le 1. \end{cases}$

4. Скільки розв'язків має система

$$\begin{cases} 2\sin x - 2\sin y + \cos z = 3, \\ 2\cos x + 2\cos y - \sin z = 4, \end{cases}$$

якщо $|x| \le 2\pi,\ \ |y| \le 2\pi,\ \ |z| \le 2\pi$? Відповідь обґрунтувати.

5. Розв'язати рівняння

$$7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14.$$

6. З'ясувати, скільки коренів має рівняння $4\cos 5x - 5\cos 4x = a$ на проміжку $[0;2\pi]$ в залежності від значення параметра *a*.

7. Записати рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = -x^2 - 3$, яка перпендикулярна прямій $y - x - 3 = 0$.

8. Висота і діагональ рівнобічної трапеції дорівнюють відповідно 5 см і 13 см. Знайти площу трапеції.

9. В конус, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник, вписана куля радіуса 2см. Знайти об’єм конуса.

9 клас

1. Знайти найбільше двозначне число, яке можна записати у вигляді суми семи послідовних натуральних чисел. Відповідь обґрунтувати.

2. Розв’язати рівняння $x^2 + \left(\frac{x}{2x-1}\right)^2 = 2$.

3. Знайти всі трійки цілих чисел $(x; y; z)$, для яких

$$\begin{cases} x + 2y + xz = 2, \\ x + 3y - yz = 3. \end{cases}$$

4. Розв'язати систему $\begin{cases} m + n = 42, \\ НСД(m,n) = 6, \end{cases}$

де m і n – натуральні числа, а $НСД(m,n)$- найбільший спільний дільник чисел m і n.

5. Довести, що для довільних дійсних чисел a і b, виконується нерівність

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

6. Корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$ - натуральні числа, причому $p + q = 2012$. Знайти ці корені.

7. На площині знайти координати одиничного вектора $\vec{e}$, який перпендикулярний вектору $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(1;-1)$ і $B(3;0)$.

8. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює c, а бісектриса одного з гострих кутів дорівнює $\frac{\sqrt{3}c}{3}$. Знайти катети.

9. В рівнобедреній трапеції довжини основ 21 см і 9 см, а довжина висоти 8 см. Знайти радіус кола, описаного навколо трапеції.

10 клас

1. Деяке число є добутком чотирьох послідовних натуральних чисел. Сума часток, що дістаються від ділення цього числа на кожний із чотирьох співмножників, дорівнює 1066. Знайти це число. Відповідь обґрунтувати.

2. Знайти всі пари дійсних чисел *(x;y)*, для яких

$$\sqrt{5-x-2y}+\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}=5.$$

3. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases}\sin^3 y+\sin^4 x=1,\\ \cos^4 y+\cos^5 x=1.\end{cases}$$

4. Розв’язати рівняння $\sin\left(x^4-x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(x^2+1\right)\left(|x|+1\right).$

5. Розв’язати нерівність $\dfrac{\sqrt{\cos 2x}}{4x-x^2}\geq 0$.

6. Довести, що коли *a, b, c* – довжини сторін трикутника, а *S* – його площа, то виконується нерівність

$$a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S,$$

а рівність має місце лише тоді, коли *a=b=c*.

7. Обчисліть скалярний добуток векторів $4\vec{a}-\vec{b}$ і $2\vec{a}+3\vec{b}$, якщо $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ і кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює $\dfrac{2\pi}{3}$.

8. Визначити гострі кути прямокутного трикутника, довжини сторін якого утворюють геометричну прогресію.

9. У прямокутній трапеції більша діагональ є бісектрисою прямого кута. Різниця довжин основ дорівнює 5 см, а різниця довжин бічних сторін дорівнює 1 см. Обчислити площу трапеції.

11 клас

1. Знайти всі натуральні числа, які в одинадцять раз більші за суму своїх цифр.

2. Розв'язати рівняння $2\arccos x = \arcsin x$.

3. Розв'язати систему нерівностей $\begin{cases} \sin\frac{x}{2} \geq \frac{1}{2}, \\ \cos 2x \leq 0, \\ tgx \leq 1. \end{cases}$

4. Скільки розв'язків має система

$$\begin{cases} 2\sin x + \sin y + 2\sin z = 4, \\ 2\cos x + \cos y + 2\cos z = 3, \end{cases}$$

якщо $|x| \leq 2\pi,\ \ |y| \leq 2\pi,\ \ |z| \leq 2\pi$? Відповідь обґрунтувати.

5. Розв'язати рівняння

$$5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 10.$$

6. З'ясувати, скільки коренів має рівняння $5\cos 3x - 3\cos 5x = a$ на проміжку $[0;2\pi]$ в залежності від значення параметра *a*.

7. Записати рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^2 - x + 3$, яка паралельна прямій $y + x + 3 = 0$.

8. Навколо кола радіуса 6см описана рівнобічна трапеція, у якої основи відносяться як 9:16. Знайти бічну сторону трапеції.

9. В прямий круговий конус з радіусом основи 2см вписана куля радіуса 1 см. Обчислити об’єм конуса.

2. РОЗВ'ЯЗКИ, МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ТА ВІДПОВІДІ ДО КОНТРОЛЬНИХ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ВІДДІЛЕННЯ МАТЕМАТИКИ

9 клас

1. Розв'язок. Нехай $n, n+1, .. n+11, n+12$ - натуральні числа, які задовольняють умову задачі. Тоді

$$n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+12)=$$
$$=13n+(1+2+\ldots+12)\le 999 \;\Leftrightarrow$$
$$13n+\frac{12\cdot 13}{2}\le 999 \;\Leftrightarrow$$
$$13n+6\cdot 13\le 999 \;\Leftrightarrow$$
$$13n\le 999-78 \;\Leftrightarrow$$
$$13n\le 921 \;\Leftrightarrow\; 1\le n\le 70{,}846\ldots$$

Звідси робимо висновок, що єдиним можливим значенням, яке задовольняє умову задачі, є число n=70. Отже,

$$70+71+72+73+74+75+76+77+78+79+80+81+82=\frac{70+82}{2}\cdot 13=988.$$

Таким чином, шукане найбільше двозначне число, яке задовольняє умову задачі, є число 988.

Відповідь: 988.

2. Розв'язок. Маємо при $x\neq 1$:

$$x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\frac{2x^2}{x-1}=8+\frac{2x^2}{x-1} \;\Leftrightarrow$$
$$\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x-1}-8=0 \;\Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{x^2-x+x}{x-1}\right)^2-\frac{2x^2}{x-1}-8=0.$$

Замінимо $\frac{x^2}{x-1}=t$, тоді $t^2-2t-8=0$. За теоремою Вієта коренями цього рівняння є $\left[\begin{array}{l} t_1=-2, \\ t_2=4. \end{array}\right.$ Отже, $\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{x-1}=-2, \\ \frac{x^2}{x-1}=4. \end{array}\right.$

Розглянемо

а) $\dfrac{x^2}{x-1}=-2 <=> \dfrac{x^2}{x-1}+2=0$,

$x^2+2x-2=0$, звідки

$x_1=-1-\sqrt{3};\quad x_2=-1+\sqrt{3}$.

б) $\dfrac{x^2}{x-1}=4 <=> \dfrac{x^2}{x-1}-4=0 <=>$,

$x^2-4x+4=0 <=> (x-2)^2=0$.

$x=2$.

Відповідь: $x\in\{-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{3};2\}$.

3. Розв'язок. З другого рівняння вихідної системи знайдемо $x=1-2y+yz$ і підставимо це значення у перше рівняння системи. Після нескладних перетворень дістанемо $y(z^2-z+1)=6-z$. Звідси маємо

$$y=\frac{6-z}{z^2-z+1}\in Z\ .$$

Підставляючи сюди послідовно $z=0,1,2,\ldots,6$, одержимо, що цілі у будуть лише при $z=0,\ z=1,\ \ z=6$.

Якщо $z\geq 7$, то $y<0$, звідки $y\leq 1$. Отже,

$$\frac{6-z}{z^2-z+1}\leq 1.$$

Легко пересвідчитися, що ця нерівність розв'язків не має.

Якщо ж $z\leq -1$, то $y>0$, звідки $y\geq 1$. Отже,

$$\frac{6-z}{z^2-z+1}\geq 1,$$

що рівносильно $z^2-z+1\leq 6-z \Leftrightarrow z^2\leq 5$. Це значить, що досить перевірити значення $z=-1$ і $z=-2$. Бачимо, що в жодному із випадків *y* не буде цілим. Таким чином, одержуємо відповідь (1;0;6), (-4;5;1) і (-11;6;0).

Відповідь: (1;0;6), (-4;5;1), (-11;6;0).

4. Розв'язок. Зазначимо, що $НСК(m,n)=НСД(m,n)u\cdot v$, де $\{u\cdot v\}\subset \boldsymbol{N}$ і $НСД(u\cdot v)=1$. Тоді $m=НСД(m,n)u,\ n=НСД(m,n)\cdot v$ і

$$\begin{cases} НСД(m,n)u\cdot v=350, \\ НСД(m,n)(u+v)=95. \end{cases}$$

Оскільки $НСД(u\cdot v)=1$, то $НСД(u\cdot v,u+v)=1$.

Тоді $НСД(350,95)=НСД(m,n)$. Значить, $НСД(m,n)=5$, звідки

$$\begin{cases} u+v=19, \\ u\cdot v=70. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи є дві пари $u=5, v=14$ і $u=14, v=5$. Оскільки $m=5u, n=5v$, то маємо $\{(m,n)|(25;70),(70;25)\}$.

Відповідь: $\{(m,n)|(25;70),(70;25)\}$.

5. Доведення. Маємо

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{(b+2c)a}{9}\ge\frac{2}{3}a^2; \quad \frac{b^3}{c+2a}+\frac{(c+2a)b}{9}\ge\frac{2}{3}b^2;$$

$$\frac{c^3}{a+2b}+\frac{(a+2b)c}{9}\ge\frac{2}{3}c^2.$$

Додавши почленно записані нерівності, отримаємо

$$\frac{a^3}{b+2c}+\frac{b^3}{c+2a}+\frac{c^3}{a+2b}+\frac{1}{3}(ab+bc+ac)\ge\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

Враховуючи, що $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$, одержимо потрібну нерівність.

6. Розв'язок. Маємо $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, але за теоремою Вієта $x_1+x_2=-a,\ x_1\cdot x_2=a-2013$. Отже,

$$x_1^2+x_2^2=a^2-2(a-2013)=$$

$$=a^2-2a+4026=(a^2-2a+1)+4025=(a-1)^2+4025.$$

Найменшою ця сума буде при $a=1$.

Відповідь: $a=1$.

7. Розв'язок. Нехай $\vec{b}=(x,y)$. Тоді за умовою колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ маємо: $\frac{x}{-1}=\frac{y}{2}$. Звідси $2x=-y \Leftrightarrow y=-2x$. Враховуючи, що $|\vec{b}|=10$, запишемо

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{10} \Leftrightarrow x^2+y^2=10.$$

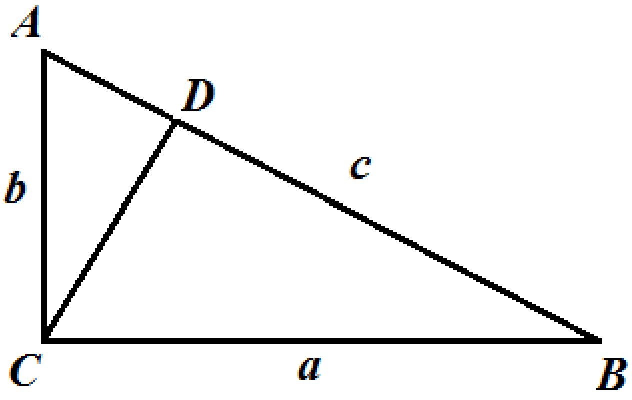
Приходимо до системи

$$\begin{cases} y=-2x, \\ x^2+y^2=10, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x, \\ 5x^2=10, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x, \\ x^2=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2x, \\ \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{2}, \\ x=\sqrt{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Звідси $\begin{cases} x=-\sqrt{2}, \\ y=2\sqrt{2}, \end{cases}$ і $\begin{cases} x=\sqrt{2}, \\ y=-2\sqrt{2}. \end{cases}$

Відповідь: $\pm(\sqrt{2};-2\sqrt{2})$.

8. Розв'язок. Нехай шуканий радіус дорівнює r.

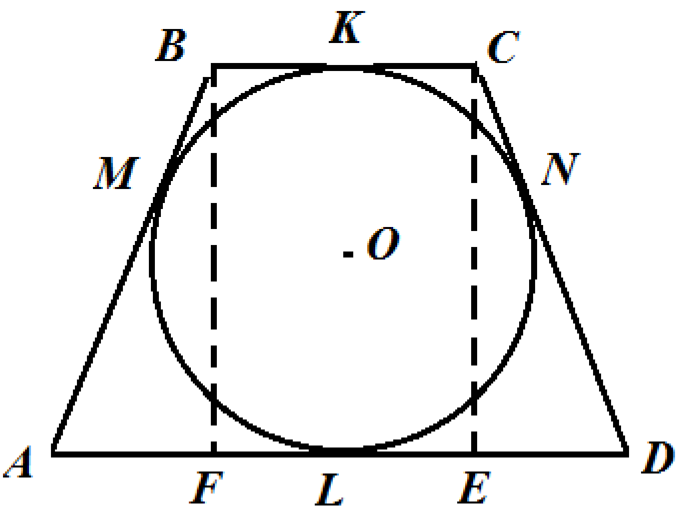


Покладемо $AB=c$, $AC=в$, $CB=a$. Із подібності трикутників ACD і ABC (кут A у них спільний, $\angle C=\angle D=90^0$) маємо $\frac{r}{r_1}=\frac{c}{b}\Rightarrow b=\frac{r_1}{r}c$. Оскільки ΔCBD подібний ΔABC, то $\frac{r}{r_2}=\frac{c}{a}$, звідки $a=\frac{r_2}{r}c$. Оскільки $a^2+b^2=c^2$, одержимо

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 c^2+\left(\frac{r_2}{r}\right)^2 c^2=c^2, \text{ або } \frac{r_1^2+r_2^2}{r}=1\Rightarrow r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}.$$

Відповідь: $r=\sqrt{r_1^2+r_2^2}$.

9. Розв'язок.



Дано:

$ABCD$ – трапеція,

$AB=CD$, $BC=2$см, $AD=8$см,

$\omega(O,r)$ - вписане коло $r=OK$.

Знайти довжину кола $\omega(O,r)$.

Зазначимо, що *BK*=*KC*=1/2*BC*=1, *AL*=*LD*=1/2*AD*=4.

Оскільки *BK*=*FL*=1, то *AF*=4-1=3. Крім того, *AL*=*AM* і *BK*=*BM* (за властивістю дотичних, проведених із однієї точки поза колом). Тоді *AB*=*AM*+*MB*=4+1=5.

Розглянемо прямокутний трикутник *ABF*, $\angle F = 90^0$. За теоремою Піфагора

$BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 = KL$. Тоді $OK = OL = 1/2KL = 1/2 \cdot 4 = 2 = r$.

Отже, довжина вписаного кола $\omega(O, r)$ дорівнює $2\pi r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$.

Відповідь: 4π.

10 клас

1. Розв’язок. Нехай п’ять послідовних натуральних чисел є $n-2, n-1, n, n+1, n+2, \quad n \geq 3$. Тоді за умовою задачі

$(n-1)n(n+1)(n+2) + (n-2)n(n+1)(n+2) + (n-2)(n-1)(n+1)(n+2) +$
$(n-2)(n-1)n(n+2) + (n-2)(n-1)n(n+1) = 5944.$

Після елементарних тотожних перетворень одержимо

$$5n^4 - 15n^2 + 4 = 5944;$$
$$n^4 - 3n^2 - 1188 = 0.$$

Покладемо $n^2 = k, k \geq 9$. Тоді останнє рівняння запишеться у вигляді $k^2 - 3k - 1188 = 0.$ Звідси $k_1 = -33, k_2 = 36$. Перший корінь не підходить, оскільки він від’ємний, тоді $n^2 = 36$. Звідси, оскільки $n \geq 3,\ n = 6$. Тоді шукане число буде 4·5·6·7·8=6720.

Відповідь: 6720.

2. Розв’язок. Скористаємося векторним методом. Нехай

$$\vec{a} = \left(\sqrt{3}\sqrt{3-x-2y}; \sqrt{3}\sqrt{5+x}; \sqrt{2}\sqrt{3y+9}\right);$$
$$\vec{b} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Тоді скалярний добуток цих векторів $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \sqrt{3-x-2y} + \sqrt{5+x} + \sqrt{3y+9}$ збігається з лівою частиною вихідного рівняння.

Зазначимо тепер, що $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos(\overline{a},\overset{\wedge}{\overline{b}})\le\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|$, оскільки $\cos(\overline{a},\overset{\wedge}{\overline{b}})\le 1$. Легко бачити, що

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{9-3x-6y+15+3x+6y+18}=\sqrt{42};$$

$$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{7}{6}}.$$

Тоді $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\le\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|=\sqrt{42}\cdot\sqrt{\frac{7}{6}}=7$. Отже, $\left(\vec{a},\vec{b}\right)\le 7$, причому знак рівності справджується тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однаково напрямлені, що рівносильно такій умові:

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{3-x-2y}}{1/\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5+x}}{1/\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\sqrt{3y+9}}{1/\sqrt{2}}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 3\sqrt{3-x-2y}=3\sqrt{5+x}=2\sqrt{3y+9}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad\begin{cases}3\sqrt{3-x-2y}=3\sqrt{5+x};\\ 3\sqrt{5+x}=2\sqrt{3y+9}.\end{cases}$$

Розв’язуючи систему рівнянь, одержуємо x = -1, y = 0.

<u>Відповідь:</u> $\{(x;y)|(-1;0)\}$.

3. <u>Вказівка.</u> Додати почленно рівняння вихідної системи і скористатися тим, що для кожного дійсного x: $\sin^2 2x+\cos^2 2x=1$, для кожного дійсного y: $\sin^2 y+\cos^2 y=1$. Далі одержати і розв’язати систему найпростіших тригонометричних рівнянь.

4. <u>Розв’язок.</u> Зазначимо, що $tg^2(x+y)+ctg^2(x+y)\ge 2$ для всіх допустимих x і y, причому рівність буде лише за умови, що $tg^2(x+y)=1$. З іншого боку, $1+2x-x^2=2-(1-2x+x^2)=2-(x-1)^2\le 2$, причому рівність досягається лише при $x=1$. Таким чином, вихідне рівняння рівносильне такій системі:

$$\begin{cases}x=1,\\ tg^2(1+y)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\ y+1=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=-1\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\end{cases}\quad k\in Z.$$

Відповідь: $\left\{(x,y)\,|\,(1;-1\pm\frac{\pi}{4}+\pi k),k\in Z\right\}$.

5. Розв'язок. Запишемо

$$\left[\begin{array}{l} tg\frac{x}{2}=0, \\ \begin{cases} tg\frac{x}{2}=0, \\ x^2-11x+10\le 0 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi n, \\ \begin{cases} x\in(2\pi k;2\pi k+\pi),k\in Z, \\ x\in[1;10] \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\pi n,n\in Z, \\ x\in[1;\pi)\cup(2\pi;3\pi) \end{array}\right.$$

Відповідь: $x\in[1;\pi)\cup[2\pi;3\pi)\cup\{2\pi n,n\in Z\}$.

6. Доведення. Розглянемо функцію $f(x)=b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2, x\in R$, графіком якої є парабола. Оскільки $b^2>0$, то вітки параболи направлені вгору. Покажемо, що ця парабола не має спільних точок з віссю абсцис, тобто $f(x)>0,\ \forall x\in R$. Знайдемо дискримінант даного тричлена:

$$D=\left(a^2-b^2-c^2\right)^2-4b^2c^2=\left(a^2-b^2-c^2-2bc\right)\left(a^2-b^2-c^2+2bc\right)=$$
$$=\left(a^2-(b+c)^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)=(a-b-c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=$$
$$=-(b+c-a)(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)<0,$$

Оскільки a,b,c – довжини сторін трикутника, то $a+b>c,\ b+c>a$ і $a+c>b$. Це означає, що вісь абсцис не має спільних точок з параболою $y=f(x)$ і оскільки $b^2>0$, то $f(x)>0,\forall x\in R$, що і треба було довести.

7. Розв'язок. За умовою перпендикулярності векторів $2\bar{a}+\bar{b}$ і $\bar{a}-3\bar{b}$ їх скалярний добуток

$$(2\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-3\bar{b})=2|\bar{a}|^2+\bar{a}\bar{b}-6\bar{a}\bar{b}-3|\bar{b}|^2=$$

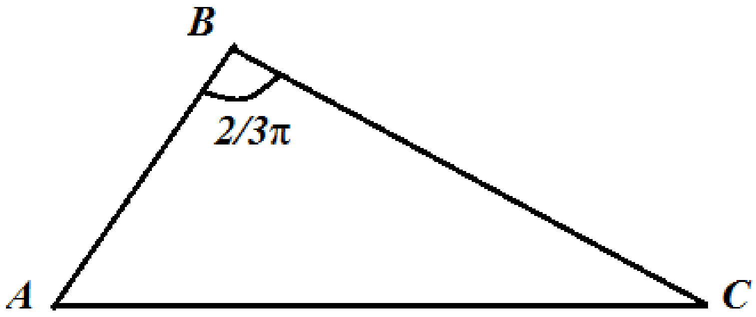
$$=2|\bar{a}|^2-5\bar{a}\bar{b}-3|\bar{b}|^2=2\cdot 4|\bar{b}|^2-5\cdot 2|\bar{b}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})-3|\bar{b}|^2=$$

$$=5|\bar{b}|^2-10|\bar{b}|^2\cdot\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=0.$$

Звідси $\cos(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{1}{2}$. Отже, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{\pi}{3}$.

Відповідь: $\frac{\pi}{3}$.

8. Розв'язок.



Нехай $BC=a$ і різниця арифметичної прогресії d, $d>0$.
Тоді $AB=a-d$,
$AC=a+d$.

За теоремою косинусів $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle B$.
Отже,

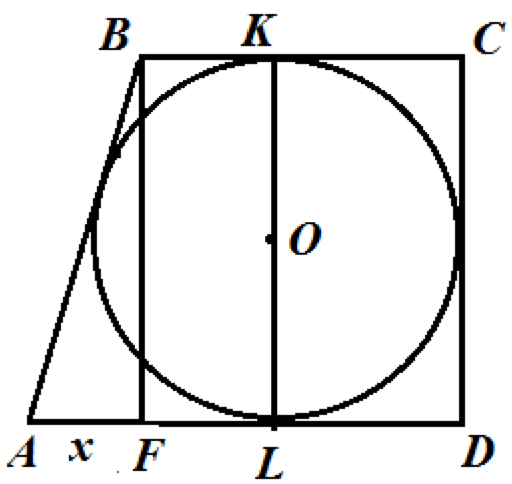
$$(a+d)^2=(a-d)^2+a^2-2(a-d)\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 2a^2-5ad=0.$$

Таким чином, одержуємо систему $\begin{cases}a+d=5,\\2a^2-5ad=0.\end{cases}$

Звідси a=5, d=2. Отже, периметр трикутника ABC дорівнює 3+5+7=15(см).
Відповідь: 15см.

9. Розв'язок. За умовою $CD\perp AD,\ BC=\frac{4}{3}r,\ OK=r$. Знайдемо AB, CD і AD.



Очевидно, що $CD=KL=2r$. Нехай $AF=x$. За теоремою Піфагора $AB=\sqrt{x^2+4r^2}$. Далі за властивістю чотирикутника, описаного навколо кола: $AB+CD=BC+AD$,

$$\sqrt{x^2+4r^2}+2r=\frac{4}{3}r+\frac{4}{3}r+x\Rightarrow$$

$$x^2+4r^2=\left(\frac{2}{3}r+x\right)^2\Leftrightarrow$$

$$x^2+4r^2=\frac{4}{9}r^2+\frac{4}{3}rx+x^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD=\frac{8}{3}r+\frac{4}{3}r=4r,\ \ AB=\sqrt{\frac{64r^2}{9}+4r^2}=\frac{10}{3}r.$$

Відповідь: $2r,\ \frac{10}{3}r,\ 4r$.

1. Розв'язок. Оскільки $abc-(a^3+b^3+c^3)=100a+10b+c-a^3-b^3-c^3=$
$=a(100-a^2)+b(10-b^2)+c(1-c^2)$, то цей вираз набуватиме найбільшого значення, якщо кожен доданок суми буде найбільшим (*a, b, c* – незалежні між собою).

Дослідимо кожен доданок окремо, пам'ятаючи, що *a, b* і *c* – цифри, і $a\neq 0$.

Вираз $a(100-a^2)$ набуває найбільшого значення при a=6. Для того, щоб переконатися в цьому, можна розглянути по черзі всі значення *a* від 1 до 9, або ж дослідити на екстремум функцію $f(x)=x(100-x^2)$ на проміжку від 1 до 9, пам'ятаючи, що *x* – ціле число в межах від 1 до 9.

Вираз $b(10-b^2)$ набуває невід'ємних значень при b=0, b=1, b=2 і b=3. Розглядаючи ці значення по черзі, одержимо, що найбільше значення досягається при b=2.

Вираз $c(1-c^2)$ невід'ємний лише при c=0, або c=1.

Таким чином, найбільше значення заданого виразу досягається при a=6, b=3, c=0 або c=1 і дорівнює 6(100-36)+2(10-4)=6·64+2·6=384+12=396.
Відповідь: 396.

2. Розв'язок. Зазначимо, що $\begin{cases}-1\le 2x-1\le 1,\\ -1\le 1-x\le 1,\end{cases}$
тому $0\le x\le 1$.

Покладемо $\alpha=\arcsin(2x-1),\ -\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$. Тоді $\sin\alpha=2x-1$.

Нехай $\beta=\arcsin(1-x)$. Оскільки $0\le x\le 1$, то $0\le\beta\le\dfrac{\pi}{2}$, тому $\sin\beta=1-x\ge 0$. Маємо $\sin\alpha=2x-1=2(1-\sin\beta)-1$, звідки для відшукання гострого кута β одержимо наступне тригонометричне рівняння

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)+2\sin\beta=1.$$

Тоді запишемо

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos\beta-\cos\frac{\pi}{3}\sin\beta+2\sin\beta=1\ ,$$

$$\frac{\pi}{6}+\beta=\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Оскільки $\frac{\pi}{6} = \arcsin\frac{1}{2} < \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} < \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$, то другий випадок суперечить тому, що $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$. Тому $\beta = \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}$.

Отже, $x = 1 - \sin\beta = 1 - \sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3+\sqrt{6}}{6}$.

Відповідь: $x \in \left\{\frac{3+\sqrt{6}}{6}\right\}$.

3. Розв'язок. Використовуючи формули для розв’язків найпростіших тригонометричних нерівностей , приходимо до такої системи:

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}\pi + 4\pi n \le x \le \frac{2}{3}\pi + 4\pi n, \quad n \in Z, \\ \frac{\pi}{2} + \pi k \le x \le \pi + \pi k, \quad k \in Z, \\ -\frac{\pi}{2} + \pi m < x \le \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad m \in Z. \end{cases}$$

Розв’язуючи цю систему, одержимо:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi n; 4\pi n\right] \cup \left(\frac{\pi}{2} + 4\pi n; \frac{2}{3}\pi + 4\pi n\right), \quad n \in Z.$$

Зауваження. Розв’язання вихідної системи спроститься, якщо здійснити заміну $\frac{x}{2} = t$ і далі скористатися тригонометричним колом.

Відповідь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 4\pi n; 4\pi n\right] \cup \left(\frac{\pi}{2} + 4\pi n; \frac{2}{3}\pi + 4\pi n\right), \quad n \in Z$

4. Вказівка. Піднести кожну рівність системи до квадрата і додати почленно ліві та праві частини отриманих співвідношень.

Далі скористатися формулами синуса чи косинуса суми і звернути увагу на те, що рівність можлива лише для граничних значень.

Обов’язково перевірити, чи справді знайдені значення задовольняють умову вихідної системи, і записати кількість таких розв’язків при $|x| \le 2\pi, \ |y| \le 2\pi, \ |z| \le 2\pi$.

5. Розв'язок. Покладемо

$$u = 8^{\sqrt[3]{\log_2^2 x}} > 0, \quad v = x^{\sqrt[3]{\log_x 2}} > 0, \ x > 0, \ x \neq 1.$$

Тоді $\log_2 u = \log_2\left(8^{\sqrt[3]{\log_2^2 x}}\right), \ \log_2 v = \log_2\left(x^{\sqrt[3]{\log_x 2}}\right).$

Звідси одержимо:

$$\log_2 u = 3\sqrt[3]{\log_2^2 x},$$

$$\log_2 v = \sqrt[3]{\log_x 2} \cdot \log_2 x = \frac{\log_2 x}{\sqrt[3]{\log_2 x}} = \sqrt[3]{\log_2^2 x}.$$

Отже, $\log_2 u = 3\log_2 v$. Тоді $u = v^3$. Отже, початкове рівняння набуде вигляду $v^3 - 7v - 6 = 0$.

Розв’язуючи це рівняння, знаходимо $v_1 = -1, \ v_2 = -2, \ v_3 = 3$. Оскільки $v = 0$, то треба розглянути лише $v = 3$. Тому $\log_2 3 = \sqrt[3]{\log_2^2 x} \quad \Leftrightarrow \quad \log_2^3 3 = \log_2^2 x$. Звідси $\log_2 x = \pm\sqrt{\log_2^3 3}$.

Отже, $x = 2^{\pm\sqrt{\log_2^3 3}}$.

Відповідь: $x = 2^{\pm\sqrt{\log_2^3 3}}$.

6. Вказівка. Побудувати графік лівої частини вихідного рівняння $y = f(x) := 4\sin 5x - 5\sin 4x, \ \ x \in [0, 2\pi]$, скориставшись при цьому похідною $f'(x), \ \ x \in [0, 2\pi]$.

Графіком правої частини рівняння $y = a, \ a \in R$, є пряма, паралельна до осі *Ox*. Звідси легко отримати відповідь на поставлене питання.

7. Розв’язок. Знайдемо спочатку $f'(x)$. Маємо

$$f'(x) = 3(a-12)x^2 + 6(a-12)x + 6.$$

Далі знайдемо всі значення *a*, при яких $f'(x) \geq 0$ виконується для всіх *x* із *R*.

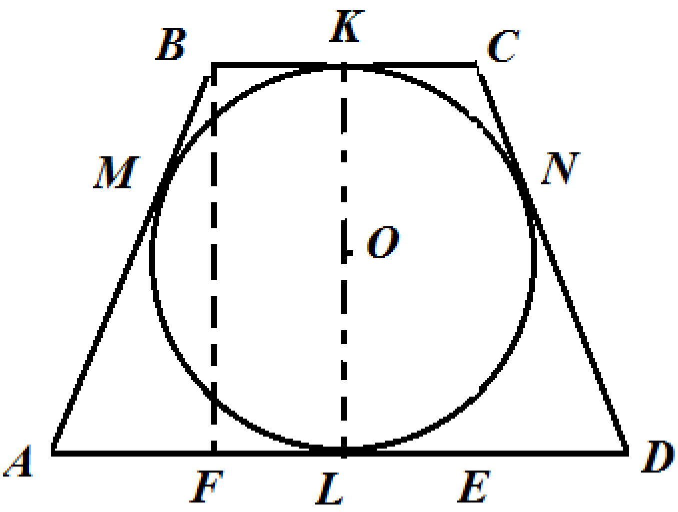
Спочатку розглянемо випадок, коли *a*=12. Одержимо при *a*=12 $f'(x) = 6 > 0, \ \forall x \in R$. Якщо *a*≠12, то f' - квадратична функція. Вона приймає невід’ємні значення при всіх $x \in R$, якщо дискримінант $D \leq 0$ і $a - 12 > 0$.

Маємо

$$\begin{cases} (a-12)^2 - 2(a-12) \leq 0, \\ a - 12 > 0. \end{cases}$$

Звідси $12 < a \le 14$. Тоді, враховуючи, що $a = 12$ теж задовольняє умову задачі, одержимо $12 \le a \le 14$.
Відповідь: $12 \le a \le 14$.

8. Розв'язок.



Дано:

ABCD – трапеція, описана навколо $\omega(O,r)$;

AB=*CD*, 2*r*=15см.

Знайти *BC*, *AD*.

Нехай *MB*=*x*, тоді *AM*=17-*x*.

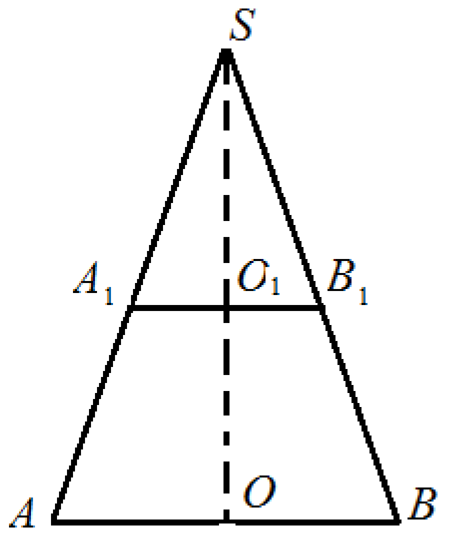
За властивістю дотичних, проведених із однієї точки поза колом до кола $\omega(O,r)$, *MB*=*BK*=*x* і *AM*=*AL*=17-*x*. Оскільки *BK*=*FL*, то *FL*=*x*. Тоді *AF*=*AL*-*FL*=17-*x*-*x*=17-2*x*.

Розглянемо прямокутний трикутник ABF, $\angle F = 90^0$. За теоремою Піфагора $AB^2 = BF^2 + AF^2$. Оскільки *BF*=*KL*=15, то $17^2 = 15^2 + (17-2x)^2 \iff 4x^2 - 68x + 225 = 0$.

Звідси $x_1 = 4{,}5;\ x_2 = 12{,}5$.

Перевірка показує, що умову задачі задовольняє лише перший корінь. Тоді *BC*=9см, *AD*=2 *AL*=$2 \cdot 12{,}5$=25см.
Відповідь: 9см і 25см.

9. Розв’язок.



Нехай SAB – осьовий переріз конуса, AO=6, SO=12.

Покладемо $A_1O_1 = r,\ OO_1 = h$. Тоді $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SO_1}{SO} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2r}{12} = \frac{12-h}{12} \Rightarrow h = 12 - 2r$.

Отже,

$V_ц = \pi r^2(12-2r) = 12\pi r^2 - 2r^3\pi,\ 0 < r < 6.$

Дослідимо функцію $V_ц = 12\pi r^2 - 2r^3\pi,\ 0 < r < 6$ на екстремум відносно *r*. Маємо

$$V_ц' = 2\pi(12r - 3r^2) = 0 \Rightarrow r = 4.$$

Очевидно, що $r = 4$ - це точка максимуму. Тоді h=12-2·4=4.

Відповідь: радіус дорівнює висоті і дорівнює 4см.