

# Контрольна робота з математики 2015-2016 н.р.

## 9 клас

### I рівень (по 3 бали)

1. Спростити вираз:  $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$
2. Розв'язати рівняння:  $x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{2}$ , де  $|x| < 1$ .
3. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 5 см і 20 см. Знайти катети трикутника.

### II рівень (по 5 балів)

1. У рівнобедрений трикутник із кутом  $120^\circ$  при вершині й бічною стороною  $a$ , вписано коло. Знайти радіус цього кола.
2. Розв'язати систему рівнянь:  
$$\begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0, \\ |y| + x - 3 = 0. \end{cases}$$

### III рівень (по 7 балів)

1. Відомо, що числа  $x_1, x_2, \dots, x_{2014}$  додатні і їх добуток дорівнює 1. Довести, що  $(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{2014}) \geq 2^{2014}$ .
2. Розв'язати нерівність  $\frac{3ax + 4}{3a + 9} < \frac{x}{a + 3} + \frac{3a - 5}{3a - 9}$ .

## Контрольна робота з математики 2015-2016 н.р.

### 10 клас

#### I рівень (по 3 бали)

1. У бригаді було 5 робітників, середній вік яких становив 35 років. Після того як бригада поповнилась одним робітником, середній вік робітників став 34 роки. Скільки років робітнику, який поповнив бригаду?
2. Розкладіть на множники першого степеня многочлен  $x^3 - x^2 - 15x - 9$ .
3. Розв'язати рівняння  $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} = 8$ .

#### II рівень (по 5 балів)

1. Хорда, довжина якої 12 см, перпендикулярна до діаметра кола і ділить його на два відрізки, різниця довжин яких дорівнює 9 см. Знайдіть довжину кола.
2. Розв'язати рівняння  $(x + 2)(x + 3)(x + 8)(x + 12) = 4x^2$ .

#### III рівень (по 7 балів)

1. При яких значеннях  $a$  рівняння  $(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$  має рівно три корені?
2. Обчисліть  $\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{7}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2013+\sqrt{2015}}}$ .

# Контрольна робота з математики 2015-2016 н.р.

## 11 клас

### I рівень (по 3 бали)

1. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції  $y = (3x - 7)^3$  в точці з ординатою  $y_0 = 8$ .
2. Спростити вираз:  $\frac{\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha}{\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha}$
3. При яких значеннях параметра  $\epsilon$  має один корінь рівняння  $(\epsilon+6)x^2 - (\epsilon-2)x + 1 = 0$  ?

### II рівень (по 5 балів)

1. Розв'яжіть нерівність  $4 \cdot 2^{2x^2-4x+2} + 8 \cdot 2^{2x^2-4x} + 4^{(x-1)^2} \leq 7 \cdot 16^2$ . Якщо розв'язком нерівності є відрізок, то у відповідь запишіть його довжину, а якщо об'єднання відрізків – суму їхніх довжин.
2. У прямокутному трикутнику бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки 20см і 15см. Відстань точки простору, рівновіддаленої від сторін трикутника, до його площини дорівнює 24 см. Обчислити відстань від даної точки до сторін трикутника.

### III рівень (по 7 балів)

1. Знайти всі значення параметра  $\alpha$ , при яких рівняння  $x^2 + x + 4\alpha = 0$  і  $\alpha^2 x^2 + \alpha x + 4\alpha = 0$  мають спільний дійсний корінь.
2. Знайти значення виразу  $(1^2 - 1 \cdot 4 + 4^2) + (2^2 - 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2) + (5^2 - 5 \cdot 8 + 8^2) + (6^2 - 3 \cdot 6 \cdot 7 + 7^2) + \dots + (2013^2 - 2013 \cdot 2016 + 2016^2) + (2014^2 - 3 \cdot 2014 \cdot 2015 + 2015^2)$

# Контрольна робота з математики для учасників МАН

2015-2016 н.р.(запасна)

9 клас

I рівень( по 3 бали)

1. Знайти всі значення параметра  $a$ , при кожному з яких рівняння  $|x^2 - 6|x| + 8| = a$  має не менше 4-х коренів.
2. Розв'язати систему рівнянь.

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 3 \\ 2y^2 - x = 3 \end{cases}$$

3. Обчислити значення виразу.

$$\frac{(\sqrt{x} + 2) \left( \frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) - (\sqrt{x} - 2) \left( \frac{2}{\sqrt{x}} + 1 \right)}{(2 - \sqrt{x+2}) \left( \sqrt{\frac{2}{x}} + 1 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)}, \text{ якщо } x = 9 \frac{53}{83}$$

II рівень. (по 5 балів)

1. Знайти квадрат бісектриси внутрішнього кута  $C$  трикутника  $ABC$ , якщо  $AB=21$ ,  $BC=28$ ,  $AC=14$ .
2. Знайти площу прямокутного трикутника, якщо радіус вписаного і описаного кіл відповідно дорівнюють  $r$  і  $R$ .

III рівень. (по 7 балів)

1. В прямокутному трикутнику проведено висоту до гіпотенузи. Відстань між центрами кіл, що вписані в два утворених трикутника рівна  $a$ . Знайти радіус кола, вписаного в початковий трикутник.
2. Довести, що при всіх дійсних  $x, y, z$ , які задовольняють рівняння  $x^2 + y^2 + z^2 = 8$  та  $xz - xy + yz = 4$ , змінна  $x$  задовольняє нерівність  $|x| \leq \frac{4}{\sqrt{3}}$

# Контрольна робота з математики для учасників МАН

2015-2016 н.р.(запасна)

10 клас

I рівень( по 3 бали)

1. Розв'язати рівняння:

$$xy+2x = \sqrt{2x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + 2y^2 - 4y + 4}$$

2. Знайти чотири числа, з яких три перші утворюють геометричну прогресію, а три останні – арифметичну, причому сума крайніх чисел рівна 32, а середніх чисел – 24.

3. Довести, що  $\sqrt{1-x+x^2} + \sqrt{1-\sqrt{3}x+x^2} > \sqrt{2}$

II рівень. ( по 5 балів)

1. Розв'язати рівняння:

$$[x]\{x\} + 3x = [x] + 12, \text{ де } [x] - \text{ціла частина числа; } \{x\} - \text{дробова частина числа; } \{x\} = x - [x].$$

2. Медіана, висота і бісектриса ділять кут трикутника на 4 рівні частини. Знайти кути трикутника.

III рівень. ( по 7 балів)

1. Нехай  $P$  і  $Q$  – середини діагоналей  $BD$  і  $AC$  чотирикутника  $ABCD$ . Довести, що  $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$

2. Знайти площу фігури, координати точок якої задовольняють рівність:

$$|x + y - 5| + |x - y + 3| + |2x - y - 4| = y + 2$$

# Контрольна робота з математики для учасників МАН

2015-2016 н.р.(запасна)

11 клас

I рівень( по 3 бали)

1. Розв'язати рівняння:

$$\frac{1}{x} + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{7}{2} \quad \text{де } |x| < 1$$

2. Розв'язати нерівність.

$$\frac{2}{x+1} > \frac{\log_3 x - 2}{1-x}$$

3. Знайти область значень функції:  $y = 3\sin 2x + 4\cos 2x + 5$

II рівень. ( по 5 балів)

1. Записати рівняння кола найменшого радіуса, яке дотикається одночасно до параболи  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  та прямої, що проходить через  $A(3; -9)$  та  $B(-4; 5)$ .

2. Бічні грані трикутної піраміди взаємно перпендикулярні, а їх площі рівні  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$ . Визначити об'єм піраміди.

III рівень. ( по 7 балів)

1. Довести нерівність

$$\sqrt{4a+7} + \sqrt{4b+7} + \sqrt{4c+7} \leq 26, \quad \text{де } a > 0, b > 0, c > 0 \text{ і } a+b+c=7$$

2. У конус вписано кулю  $K_1$ . Куля  $K_2$  дотикається до кулі  $K_1$  і до всіх твірних конуса. Радіус кулі  $K_2$  в тразів менший від радіуса кулі  $K_1$ . При якому значенні  $t$  відношення площі поверхні кулі  $K_1$  до площі поверхні конуса є найбільшим?